Лекция 3. Динамикалық жүйелер. Негізгі ұғымдар. Фазалық кеңістік, фазалық траекториялар. (дәріс беруші- қауымдастырылған профессор Маусымбекова С.Д.)

Алматы, 2024

Динамикалық жүйелер. Негізгі ұғымдар. Фазалық кеңістік, фазалық траекториялар

Жүйенің күйі (физикада, химияда, биологияда және т.б.) t уақыты бойынша өзгеретін айнымалылармен сипатталсын. Уақыт бойынша өзгеретін келесі айнымалылармен сипатталған жүйені қарастырайық. Функция ретінде қарастырылған айнымалалардың өзгеру жылдамдығы осы шамалардың уақыт бойынша туындысы және осы айнымалылар функциялары өзгеру жылдамдығына әсер ететін параметрлермен бірге дифференциалдық теңдеулерге әкеледі.

Динамикалық жүйе - қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ .... \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{1}$$

мұндағы $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}, ..., \dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$.

Тұрақты уақыт үшін $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ айнымалыларын n-өлшемді кеңістік нүктесінің координаталары ретінде (фазалық кеңістік деп аталатын) қарастыра аламыз. t айнымалысының өзгеруімен $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ нүктесі фазалық кеңістікте белгілі бір қисық сызықты - фазалық траекторияны сипаттайды.

Векторлық түрде (1.1) жүйесі келесі түрде жазылады:

$$\dot{x} = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2}$$

Мұндағы $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n), f = (f_1, f_2, ..., f_n)$. Осы жүйенің шешімі

$$x = \phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), ...\phi_n(t))$$

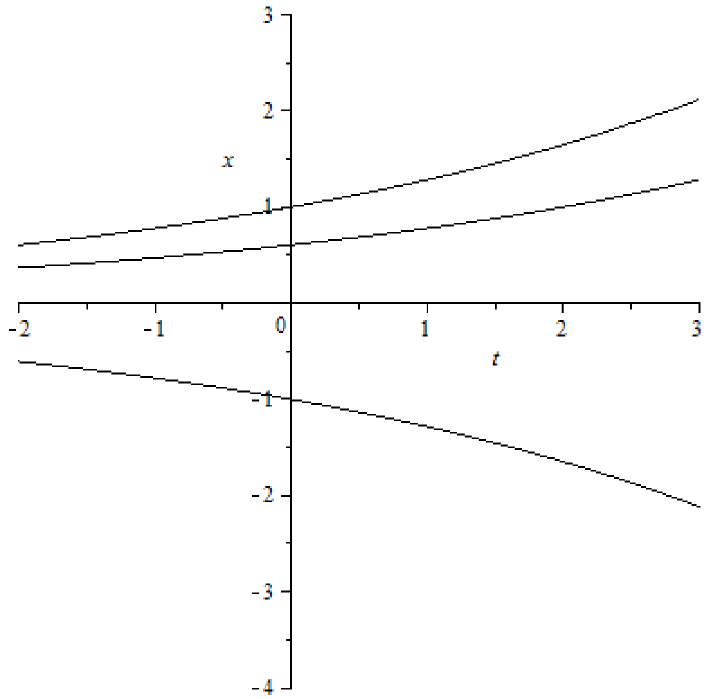
арқылы белгіленеді. Жүйенің оң жақ бөліктері $(x_1, x_2, ..., x_n)$ бойынша бірінші ретті үзіліссіз туындылары бар деп болжанады.

Дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша кез келген $t = t_0$ және

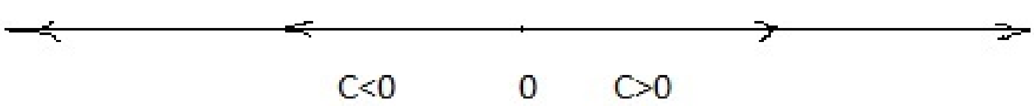
$$M_0(x_{01}, x_{02}, ...x_{0n})$$

үшін (1.1) жүйесінің жалғыз шешімі бар және ол $t = t_0$ уақытында M_0 нүктесінен өтеді. $\dot{x} = x$ теңдеуін (бірінші ретті жүйе) және оның $x = Ce^t$ жалпы шешімін қарастырайық. 1.2-суретте осы теңдеудің интегралдық қисықтары көрсетілген. Фазалық траекториялар интегралдық қисықтардың $t = 0$ түзуіне проекциясы болып табылады (1.3-сурет).

Сонымен, интегралдық қисықтар жүйенің шешімдері туралы толық ақпарат береді, ал фазалық траекториялар кем ақпарат береді. 1.2-суретте көрсетілгендей, x-тың өзгеру жылдамдығы t-артқан сайын артады. Дегенмен, фазалық траекторияларды интегралды қисықтарды білмей зерттеу оңайырақ. Интегралдық қисықтарды алу үшін дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге тура келеді. Егер жүйе үшін шешім алынса



1.2-сурет



1.3-сурет

да оның қасиеттерін зерттеу күрделі мәселе болып табылады. Фазалық траекторияның келесі қасиеттерін қарастырайық:

1–қасиет. Егер $x = \phi(t)$ – (1.2) жүйесінің шешімі болса, онда кез-келген нақты C саны үшін, $x = \phi(t + C)$ (1.2) жүйесінің шешімі болады.

2–қасиет. Жүйесінің екі фазалық траекториясының ортақ нүктелері болмайды немесе беттеседі. Сонымен, (1.2) жүйесінің фазалық кеңістігі қиылыспайтын фазалық траекториялардан тұрады, яғни, нүкте арқылы жалғыз фазалық траектория өтеді.

Анықтама: $a = (a_1, a_2, ...a_n)$ нүктесі (2) жүйесінің тепе-теңдік күйі деп аталады, егер $f(a) = 0$. Басқаша айтқанда, a – келесі жүйенің $f(x) = 0$ шешімі болып табылады.

Мысалы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

жүйесі үшін жалғыз (0;0) нүктесі тепе-теңдік күй нүктесі болса, ал келесі нүктелер:

(1;1), (2;2), (0;2/3) төмендегі жүйеге сәйкес үш түрлі тепе-теңдік күй болып табылады.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-y), \\ \dot{y} = x^2 - 3y + 2 \end{cases} .$$

3–қасиет. Егер (1.2) жүйесіің тепе-теңдік күйі a болса, онда $x = a$ жүйенің шешімі және $x = a$ нүктесі оның фазалық траекториясы болып табылады.

4–қасиет. (1.2) жүйесінің әрбір фазалық траекториясы:
- қиылысусыз тегіс қисық,
– жабық тегіс қисық,
– нүкте болуы мүмкін.

1.4-суретінде фазалық траектория болмайтын жағдайлар көрсетілген. Себебі сол жақтағы суретте траектория өздігінен қиылысқан, оң жақтағы суретте қисық тегіс емес. (1.2) Жүйенің $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..x_{0n})$ нүктеден өтетін шешімі $x = x(t, x_0)$, $(x_0 = x(0, x)$ арқылы белгіленеді. **5–қасиет.** $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_2, x(t_1, x_0)$, яғни қозғалыс фа-

1.4-сурет

залық траектория бойынша x_0 нүктесінен басталса және t-дан $t_1 + t_2$ - ге жылжыса, $x(t_1, x_0)$ нүктесінен бастап t_2 жылжығандай болады.

Динамикалық жүйенің қасиеттерін шешімдерсіз зерттеуді дифференциалдық теңдеулердің сапалы теориясы қарастырады. Динамикалық жүйені зерттеу динамикалық жүйенің фазалық портретін немесе жеке траектория қасиеттерін зерттеуге әкеледі.

0.0.1 Бір өлшемді сызықты жүйелер. Бір өлшемді жүйелердің тепе-теңдік күйінің тұрақтылығы

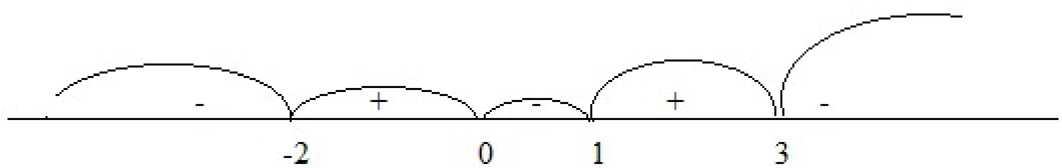
Бір өлшемді жүйе қарастырылсын:

$$\dot{x} = f(x), \tag{3}$$

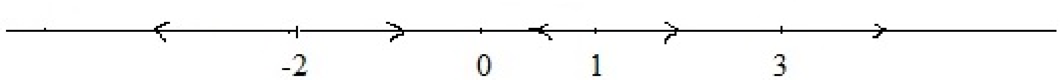
мұндағы $x \in R^1$, $f(x)$ - сандық функция. Фазалық кеңістік - түзу сызық. Егер қандай да бір интервалда $f(x) > 0$ болса, $\dot{x} > 0$, уақыт өте келе x координатасы өседі және сурет нүктесі фазалық түзу бойымен оңға жылжиды, егер $\dot{x} < 0$ яғни $f(x) < 0$ болған жағдайда нүкте солға жылжиды. Егер $f(x) = 0$ болса, x – тепе-теңдік күй болады.
Мысал. Келесі теңдеудің фазалық портретін бейнелеу есебі.

$$\dot{x} = x(x-1)(x+2)^3(x-3)^2$$

Тепе-теңдік күй нүктелерін анықтаймыз және теңдеудің оң жағының таңбасын анықтау үшін интервалдар әдісін қолданамыз (1.5-сурет).



1.5-сурет



1.6-сурет

Осы суреттен

$$\lim_{x \to \infty} x(t, x_0) = 0$$

орындалатын "0"нүктесінің маңайы табылатыны көрінеді, яғни $x = 0$, нүктесінің қасынан басталған қозғалыс уақыт өткеннен кейін тепе-теңдік күйіне ұмтылады. Бұл тепе-теңдік күй асимптота бойынша тұрақты деп аталады. $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ тепе-теңдік күйлері тұрақсыз деп аталады.

Тұрақты тепе-теңдік күй келесідей анықталуы мүмкін: егер тепе-теңдік жағдайынан аз ауытқу кезінде жүйе ерекше нүктеден алысқа кетпесе, онда осы жалғыз нүкте жүйенің тұрақты режиміне сәйкес келетін тұрақты тепе-теңдік күйі болады.

$dx/dt = f(x)$ теңдеуінің тепе-теңдік күйінің тұрақтылығының қатаң математикалық анықтамасы келесідей: тепе-теңдік күй Ляпунов бойынша тұрақты, егер қандай да кіші ϵ тұрақтысы үшін $t_0 < t < +\infty$ аралығында $|x(t) - \bar{x}| < \epsilon$ үшін келесі теңсіздік орындалатын

$$|x(t_0) - \bar{x}| < \delta \tag{4}$$

δ тұрақтысын табуға болатын болса.

Басқаша айтқанда, тұрақты тепе-теңдік жағдайында келесі мәлімдеме дұрыс: егер бір t_0 уақытта тепе-теңдік күйінен ауытқу аз болса ($|x(t_0) - \bar{x}| < \delta$), онда кез-келген келесі $t > t_0$ уақыты үшін жүйенің тепе-теңдік күйінен шығуының ауытқуы да аз болады: $|x(t) - \bar{x}| < \epsilon$.

Сонымен, стационарлық күй тұрақты деп аталады, егер шағын ауытқулар жүйені стационарлық күй маңайынан тым алыстатпаса.

Стационарлық күй асимптота бойынша тұрақты деп аталады, егер аз ауытқулар уақыт бойынша өшетін болса. Егер аз ауытқулар уақыт өте келе күшейетін болса, стацинарлық күй тұрақсыз деп аталады.

Сұрақтар:

1. Динамикалық жүйенің анықтамасын беріңіз, мысалдар келтіріңіз.
2. Динамикалық жүйенің қалыптасу нүктесі дегеніміз не?
3. Фазалық траекторияның не екенін түсіндіріп, фазалық траекторияның негізгі қасиеттерін атаңыз.
4. Бір өлшемді жүйелердің тепе-теңдік жағдайының тұрақтылығын түсіндіріңіз.
5. Динамикалық жүйелердің асимптоталық тұрақты тепе-теңдік күйі дегеніміз не?
6. Ляпунов бойынша тұрақтылықты анықтаңыз.

Әдебиеттер:

(a) Бейли Н. Математика в биологии и медицине. Москва, Изд-во «Мир», 1970

(b) С.А.Ляшко «Элементы теории динамических систем» Учебное пособие для студентов специальности «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика» Балашов, Изд-во «Николаев», 2005, 104С.

(c) В.И. Арнольд «Обыкновенные дифференциальное уравнения» Ижевск: Удм.ГУ, 2000. – 368 с.